

$$\frac{c}{2} - \frac{A \cdot b}{x^2} = 0. \quad (8)$$

Производная имеет на $(0, A]$ единственный корень $x_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot A \cdot b}{c}}$. Установив промежуток монотонности, замечаем, что в точке x_0 функция имеет минимум. Очевидно, что значение $g(x_0)$ является наименьшим значением $g(x)$ на $(0, A]$. Вернёмся к функции расходов $G(I_0)$. График функции $g(x)$ изображает непрерывная кривая, график дискретной функции расходов $G(I_0)$ представляет собой набор точек на этой кривой. Если при некотором $n \in N$ $x_0 = \frac{A}{n}$, то $I_0 = x_0$ – оптимальный объём покупки, минимизирующий годовые расходы фирмы. Если же при любом $n \in N$ $x_0 \neq \frac{A}{n}$, найдём m такое, что

$$\frac{A}{m+1} < x_0 < \frac{A}{m}. \quad (9)$$

Такое m всегда найдётся, так как $x_0 < A$, последовательность $\left\{\frac{A}{n}\right\}$ убывает и $\frac{A}{n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Поскольку $g(x)$ убывает на $(0, x_0]$ и $G(I_0) = g(I_0)$ для любого $I_0 = \frac{A}{n}$, то $G \cdot \left(\frac{A}{k}\right) > G \cdot \left(\frac{A}{m+1}\right)$, когда $k > m+1$. Из возрастания $g(x)$ на $[x_0, A]$ следует, что $G \cdot \left(\frac{A}{m}\right) < G \cdot \left(\frac{A}{k}\right)$, когда $k < m$. Таким образом,

$$\min_{I_0 \in (0, A]} G(I_0) = \min \left\{ G \cdot \left(\frac{A}{m+1}\right), G \cdot \left(\frac{A}{m}\right) \right\} \quad (10)$$

Для функции расходов минимальные расходы фирма имеет, когда

$$I_0 = \frac{A}{3}, n = 3. \quad (11)$$

УДК 519.6, 517.9

РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ЭКВИВАЛЕНТНОЙ НЕЛИНЕЙНОМУ УРАВНЕНИЮ С ШЕСТЬЮ ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ

Швычкина Е.Н.

Брестский государственный технический университет, г. Брест

В работе [1] рассматривается дифференциальное уравнение Шази с шестью особыми точками вида

$$w''' = \sum_{k=1}^6 \frac{w' w'' + A_k (w')^3 + c_k w'}{w - a_k} + E w', \quad (1)$$

коэффициенты которого a_k , $(k = \overline{1, 6})$ являются постоянными величинами и симметричны относительно начала координат, представлено в виде эквивалентной системы двух дифференциальных уравнений третьего порядка. А именно:

$$\begin{cases} w'' = f_1(z, w)w'^2 + f_2(z, w)v + f_3(w), \\ v' = -2f_1(z, w)w'v, \end{cases} \quad (2)$$

где $f_i (i = \overline{1, 3})$ функции по z и w .

Там же рассмотрен метод нахождения функций, являющихся коэффициентами иско-
мой системы (2) [1]. В СКА *Mathematica* написан программный модуль

$$\text{constrSyst emChazy } [a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6], \quad (3)$$

который находит явный вид коэффициентов системы (2) для нелинейного дифферен-
циального уравнения третьего порядка (1).

Выберем, например, в качестве значений a_k , ($k = \overline{1, 6}$) соответственно величины

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{1}{4}, \quad a_4 = -\frac{1}{2}, \quad a_5 = -\frac{1}{4}, \quad a_6 = -1.$$

В результате действия модуля (3) получим следующую систему дифференциальных
уравнений вида:

$$\begin{aligned} w'' = & \frac{1 + 12w^2 + (1 + w)(1 + 4w)(5 + 8w)}{2w + 8w^3 + (1 + w)^2(1 + 4w)^2} w'^2 + v(w - 1) \left(w - \frac{1}{2} \right) \left(w - \frac{1}{4} \right) \times \\ & \times \left(w + \frac{1}{4} \right) \left(w + \frac{1}{2} \right) (w + 1) - (10c_1(2w - 1)(1 + 2w + 16w^2 + (7 + 47w + 88w^2 + \\ & + 48w^3)) + (w - 1)(-c_2(16(1 + w + 13w^2) + 3(31 + 207w + 384w^2 + 208w^3)) + \\ & + (2w - 1)(19(-1 - 3w + 14w^2 + 48w^3 + 32w^4) + e(21 + 143w + 274w^2 + 152w^3) + \\ & + e(3 + 9w + 38w^2))))(19((1 + 5w + 4w^2)^2 + 2(w + 4w^3)))^{-1}, \\ v' = & -2 \frac{1 + 12w^2 + (1 + w)(1 + 4w)(5 + 8w)}{2w + 8w^3 + (1 + w)^2(1 + 4w)^2} w'v. \end{aligned} \quad (4)$$

где c_1, c_2, e – коэффициенты уравнения (1). Решим систему (4). Интегрируя второе ра-
венство системы (4), найдем, что

$$v = \frac{C_1}{1 + 12w + 33w^2 + 48w^3 + 16w^4}.$$

Подставим найденную функцию $v(z)$ в первое уравнение системы (4), которое после
замены вида

$$(w'(z))^2 = y(w), \quad w''(z) = \frac{1}{2} y'(w)$$

преобразуется в линейное дифференциальное уравнение первого порядка относитель-
но функции $y(w)$. После интегрирования полученного уравнения и возвращения к ис-
ходной функции $w(z)$ запишем уравнение вида

$$w'^2 = \frac{6}{19} + C_2 + \left(\frac{52}{19} - \frac{C_1}{32} + 12C_2 \right) w + 33C_2 w^2 + \left(8 - \frac{C_1}{8} + 48C_2 \right) w^3 + 16C_2 w^4, \quad (5)$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные. Общий интеграл последнего уравнения примет вид

$$\begin{aligned}
& - \left(2(r_1 - r_4) F \left[\operatorname{Arcsin} \left[\sqrt{\frac{(r_2 - r_4)(w - r_1)}{(r_1 - r_4)(w - r_2)}} \right], \frac{(r_2 - r_3)(r_1 - r_4)}{(r_1 - r_3)(r_2 - r_4)} \right] \frac{r_1 - r_2}{(r_1 - r_4)(w - r_2)} \times \right. \\
& \times \left. \sqrt{\frac{(r_2 - r_4)(w - r_1)(w - r_3)(w - r_4)}{(r_1 - r_3)(w - r_2)}} \right) \cdot (32(6 + 19C_2) + (1664 - 19C_1 + 7296C_2)w + \\
& + 20064C_2w^2 - 76(C_1 - 64(6C_2 + 1))w^3 + 9728C_2w^4)^{-1/2} = \\
& = (r_4 - r_2)(r_1 - r_2) \left(\pm \frac{z}{4\sqrt{38}} + C_3 \right),
\end{aligned} \quad (6)$$

где $F[\phi | m]$ – неполный эллиптический интеграл первого рода [4], а именно:

$$F[\phi | m] = \int_0^\phi (1 - m \sin^2(\theta))^{-1/2} d\theta, \text{ где } -\pi/2 < \phi < \pi/2,$$

и

$$\begin{aligned}
r_i = & \operatorname{Root}[192 + 608C_2 + (1664 - 19C_1 + 7296C_2)\#1 + 20064C_2\#1^2 + \\
& + (4864 - 76C_1 + 29184C_2)\#1^3 + 9728C_2\#1^4, i] \quad (i=1,2,3,4).
\end{aligned}$$

В системе *Mathematica* [2, 3] выражение *Root* – объект является точным, однако неявным выражением для корней полиномиального уравнения вида

$$192 + 608C_1 + (1664 - 19C_1 + 7296C_2)z + 20064C_2z^2 + (4864 - 76C_1 + 29184C_2)z^3 + 9728C_2z^4 = 0$$

Приведем здесь графическую визуализацию решения (6) при начальных условиях $w(1) = 3$, $w'(1) = 3$, $w''(1) = 3$. Найдем значения произвольных постоянных C_1, C_2, C_3 , а именно:

$$C_1 = \frac{674560}{10773}, C_2 = \frac{10}{10773}, C_3 \approx -0,0413 - 2,2999 \times 10^{-17}i.$$

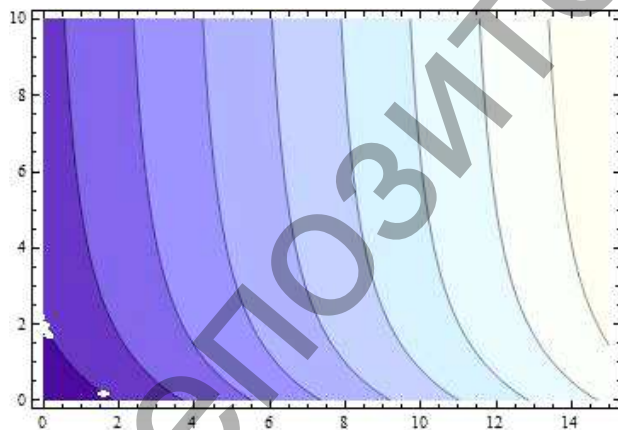


Рисунок 1

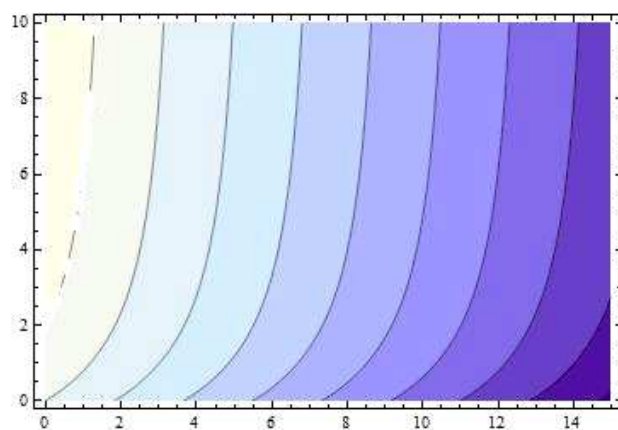


Рисунок 2

На рисунках 1 и 2 изображены графики двух ветвей общего интеграла (6).

Список цитированных источников

1. Швычкина, Е.Н. О построении системы, эквивалентной дифференциальному уравнению Шази с шестью особыми точками / Е.Н. Швычкина // Вестник Брестского университета. Серия естеств. наук. – 2010. – №2. – С. 142–148.
2. Wolfram Web Resources / ed. S. Wolfram [Electronic resource]. – Champaign, 2013. – Mode of access: www.wolfram.com – Date of access: 1.06.2013.
3. Trott, M. The *Mathematica* GuideBook for symbolics. – New York: SpringerVerlag, 2006. – 1453 p.
4. Янке, Э. Специальные функции. Формулы, графики, таблицы / Э. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1968. – 344 с.